# 模块二 常用逻辑用语（★★）

## 强化训练

1．（2023・浙江模拟・★）“$\alpha=60^{\circ}$”是“$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$”的（　　）

（A）充分不必要条件　（B）必要不充分条件　（C）充要条件　（D）既不充分也不必要条件

**答案：** A

**解析：** 判断充分条件、必要条件，就看二者能否互推，先看充分性，即由$\alpha=60^{\circ}$能否推出$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

当$\alpha=60^{\circ}$时，$\sin\alpha=\sin60^{\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，故充分性成立；再看必要性，即由$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$能否推出$\alpha=60^{\circ}$，

当$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$时，$\alpha$不一定等于$60^{\circ}$，例如可取$\alpha=120^{\circ}$，也满足$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以必要性不成立，故选A.

2．（2022・陕西模拟・★）若$x$，$y$为正实数，则“$\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{y}$”是“$\log_2x>\log_2y$”的（　　）

（A）充分不必要条件　（B）必要不充分条件　（C）充要条件　（D）既不充分也不必要条件



**答案：** C

**解析：** 判断充分条件、必要条件，就看二者能否互推，先看充分性，即由$\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{y}$能否推出$\log_2x>\log_2y$，

若$\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{y}$，则$\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{y-x}{xy}<0$，又$x$，$y$为正实数，所以$xy>0$，从而$y-x<0$，故$x>y>0$，

所以$\log_2x>\log_2y$，故充分性成立；再看必要性，即由$\log_2x>\log_2y$能否推出$\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{y}$，

若$\log_2x>\log_2y$，则$x>y>0$，所以$\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{y-x}{xy}<0$，从而$\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{y}$，故必要性成立；所以选C.

3．（2023・四川成都一模・★★）已知直线$l,m$和平面$\alpha$，$\beta$，若$\alpha\perp\beta$，$l\perp\alpha$，则“$l\perp m$”是“$m\perp\beta$”的（　　）

（A）充分不必要条件　（B）必要不充分条件　（C）充要条件　（D）既不充分也不必要条件

**答案：** B

**解析：** 先看充分性，即由$l\perp m$能否推出$m\perp\beta$，如图1，当$l\perp m$时，$m\perp\beta$不成立，所以充分性不成立；再看必要性，即由$m\perp\beta$能否推出$l\perp m$，如图2，当$m\perp\beta$时，必有$l\perp m$，所以必要性成立；故选B.

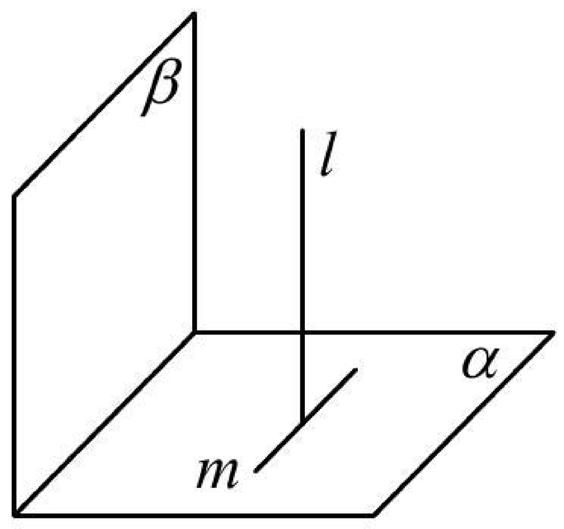


图1

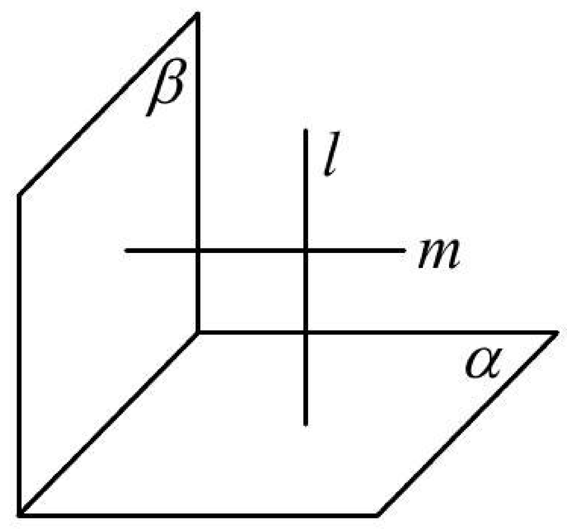


图2

4．（2023 • 全国甲卷 • ★★）“$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$”是“$\sin\alpha+\cos\beta=0$”的（　　）

（A）充分条件但不是必要条件　　（B）必要条件但不是充分条件

（C）充要条件　　（D）既不是充分条件也不是必要条件

答案：B

解析：对比两个式子发现，将$\sin^2\beta$换成$1-\cos^2\beta$，即可统一函数名，

$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1\Leftrightarrow\sin^2\alpha=1-\sin^2\beta\Leftrightarrow\sin^2\alpha=\cos^2\beta\Leftrightarrow\sin\alpha=\pm\cos\beta\Leftrightarrow\sin\alpha\pm\cos\beta=0$，

所以“$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$”是“$\sin\alpha+\cos\beta=0$”必要不充分条件.

5．（2022 • 天津一模 • ★★）在等比数列$\{a_n\}$中，公比为$q$，则“$q>1$”是“$a_{n+1}>a_n(n\in\mathbf{N}^*)$”的（　　）

（A）充分不必要条件　（B）必要不充分条件　（C）充要条件　（D）既不充分也不必要条件

答案：D

解析：先看充分性，当$q>1$时，要比较$a_{n+1}$和$a_n$，可作差，并将$a_{n+1}$化为$a_nq$，提公因式来看，



$a_{n+1}-a_n=a_nq-a_n=a_n(q-1)$，其中$q-1>0$，但若$a_n<0$，则$a_{n+1}-a_n<0$，即$a_{n+1}<a_n$，充分性不成立；

再看必要性，当$a_{n+1}>a_n$时，$a_{n+1}-a_n=a_nq-a_n=a_n(q-1)>0$，

若$a_n<0$，则$q-1<0$，所以$q<1$，必要性不成立；故选 D.

6．（2023 • 辽宁模拟 • ★★）“对任意的$x\in\mathbf{R}$，都有$2kx^2+kx-\frac{3}{8}<0$”的一个充分不必要条件是（　　）

（A）$-3<k<0$　（B）$-3<k\le0$　（C）$-3<k<1$　（D）$k>-3$

答案：A

解析：可先求出充要条件，再选答案，所给不等式平方项含字母，需讨论它为 0 的情形，

当$k=0$时，$2kx^2+kx-\frac{3}{8}<0$即为$-\frac{3}{8}<0$，该不等式恒成立；

当$k\ne0$时，$2kx^2+kx-\frac{3}{8}<0$恒成立$\Leftrightarrow\begin{cases}2k<0\\ \Delta=k^2-4\times2k\times(-\frac{3}{8})<0\end{cases}$，解得：$-3<k<0$；

综上所述，$2kx^2+kx-\frac{3}{8}<0$对任意的$x\in\mathbf{R}$恒成立的充要条件是$-3<k\le0$，

让选的是充分不必要条件，应取上述范围的一个真子集，因为$(-3,0)$　$(-3,0]$，所以选 A.

7．（2022 • 四川成都期末 • ★）设命题$p:\ln(x-1)<0$，命题$q:a\le x\le a+2$，若$p$是$q$的充分不必要条件，则实数$a$的取值范围是（　　）

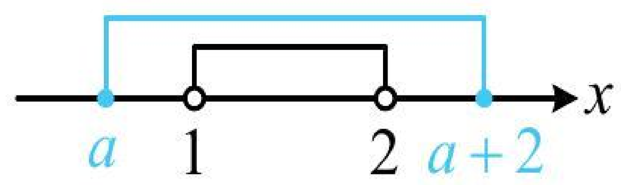
（A）$[0,1]$　　（B）$(0,1)$　　（C）$(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$　　（D）$(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

答案：A

解析：由所给不等式容易得到对应的集合，故可将已知条件翻译成集合间的包含关系，再求 $a$ 的范围，

$\ln(x-1)<0 \Leftrightarrow 0<x-1<1 \Leftrightarrow 1<x<2$，记 $A=(1,2)$，$B=[a,a+2]$，

因为 $p$ 是 $q$ 的充分不必要条件，所以 $A\quad B$，如图，应有 $\begin{cases} a\le 1 \\ a+2\ge 2 \end{cases}$，所以 $0\le a\le 1$.




8.（2022•安徽月考•★★）已知集合 $A=\{x\,|\,y=\ln(3x^2-7x+4)\}$，$B=\{x\,|\,27^{x+m}-9>0\}$，若“$x\in A$”是“$x\in B$”的必要不充分条件，则实数 $m$ 的取值范围是_____.

答案：$(-\infty,-\frac{2}{3}]$

解析：题干集合 $A$ 和 $B$ 中的元素不清晰，先对其进行分析，

集合 $A$ 为函数 $y=\ln(3x^2-7x+4)$ 的定义域，由 $3x^2-7x+4>0$ 可得 $(3x-4)(x-1)>0$，

解得：$x<1$ 或 $x>\frac{4}{3}$，所以 $A=(-\infty,1)\cup(\frac{4}{3},+\infty)$；由 $27^{x+m}-9>0$ 可得 $27^{x+m}>9$ ①，

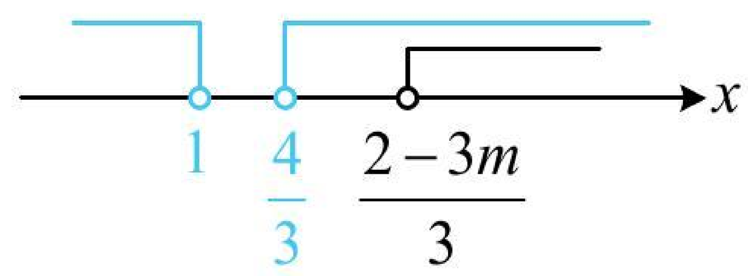
要进一步求解，可将底数都化为 3，用指数函数的单调性来分析，

不等式①等价于 $(3^3)^{x+m}>3^2$，即 $3^{3x+3m}>3^2$，所以 $3x+3m>2$，解得：$x>\frac{2-3m}{3}$，故 $B=(\frac{2-3m}{3},+\infty)$；



“$x\in A$”是“$x\in B$”的必要不充分条件等价于“$x\in B$”是“$x\in A$”的充分不必要条件，

由“小可推大，大不推小”知 $B\quad A$，如图，应有 $\frac{2-3m}{3}\ge\frac{4}{3}$，解得：$m\le-\frac{2}{3}$.




9.（2022•北京模拟•★）已知命题 $p:\exists x>5$，$2x^2-x+1>0$，则 $p$ 的否定为（　　）

（A）$\forall x\le 5$，$2x^2-x+1\le 0$　　（B）$\forall x>5$，$2x^2-x+1\le 0$

（C）$\exists x>5$，$2x^2-x+1\le 0$　　（D）$\exists x\le 5$，$2x^2-x+1>0$

答案：B

解析：否定存在量词命题，先“存在”改“任意”，再否定结论，命题 $p$ 的否定为 $\forall x>5$，$2x^2-x+1\le 0$.

10.（2022•四川眉山模拟•★）命题 $p:\forall x\in\mathbf{Q}$，$x^2\in\mathbf{Q}$ 的否定为（　　）

（A）$\forall x\notin\mathbf{Q}$，$x^2\notin\mathbf{Q}$　　（B）$\forall x\in\mathbf{Q}$，$x^2\notin\mathbf{Q}$　　（C）$\exists x\notin\mathbf{Q}$，$x^2\notin\mathbf{Q}$　　（D）$\exists x\in\mathbf{Q}$，$x^2\notin\mathbf{Q}$

答案：D

解析：否定全称量词命题，先“任意”改“存在”，再否定结论，命题 $p$ 的否定为 $\exists x\in\mathbf{Q}$，$x^2\notin\mathbf{Q}$.

11.（2022•广西玉林模拟•★★）若命题 $p:\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2+2(a+1)x+1<0$ 是假命题，则实数 $a$ 的取值范围是_____.

**答案：** $[-2,0]$

**解析：** 根据假命题求参，常等价转化为其否定为真命题来考虑，

命题 $p$ 的否定为：$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+2(a+1)x+1\ge 0$，所以 $\Delta=4(a+1)^2-4\le 0$，解得：$-2\le a\le 0$.

12．（2022 • 河北承德模拟 • ★★★）命题 $p:\exists x\in[-1,1]$，使 $x^2+1<a$ 成立；命题 $q:\forall x>0$，$ax<x^2+1$ 恒成立. 若命题 $p$ 与 $q$ 有且只有一个为真命题，则实数 $a$ 的取值范围是_____.

**答案：** $(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$

**解析：** $p$ 与 $q$ 有且只有一个为真命题有 $p$ 假 $q$ 真、$p$ 真 $q$ 假两种情况，分别讨论即可，

当 $p$ 为假命题，$q$ 为真命题时，其中 $p$ 为假命题等价于 $p$ 的否定“$\forall x\in[-1,1]$，$x^2+1\ge a$”为真命题，

因为 $x^2+1$ 在 $[-1,1]$ 上的最小值为 1，所以 $a\le 1$ ①，

对命题 $q$，$\forall x>0$，$ax<x^2+1\Leftrightarrow a<x+\dfrac{1}{x}$，因为 $x+\dfrac{1}{x}\ge 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}=2$，当且仅当 $x=1$ 时取等号，

所以 $(x+\dfrac{1}{x})_{\min}=2$，因为 $a<x+\dfrac{1}{x}$ 对任意的 $x>0$ 都成立，所以 $a<2$，结合①可得 $a\le 1$；

当 $p$ 为真命题，$q$ 为假命题时，无需重复计算，在上面 $p$ 为假，$q$ 为真的结果中各自取补集即可，

由前面的分析过程知 $p$ 为假命题时 $a\le 1$，所以 $p$ 为真命题时应有 $a>1$ ②，

同理，$q$ 为真命题时，$a<2$，所以 $q$ 为假命题时，应有 $a\ge 2$，结合②可得 $a\ge 2$；

综上所述，实数 $a$ 的取值范围是 $(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$.

**【反思】** 当两个命题一真一假时，可选其中一种情况来求参数范围，另一种情形直接在此基础上各自取补集再考虑即可.